

§ 2.4. Integrace racionální lomené funkce

Průvodce studiem



Důležitou skupinu funkcí, které můžeme (aspoň teoreticky) integrovat v množině elementárních funkcí, tvoří racionální lomené funkce. K úspěšné integraci potřebujeme některé výsledky z algebry, se kterými jste se seznámili v předchozím studiu.

Z toho, co již bylo v předcházející kapitole řečeno, vyplývá, že každou racionální lomenou funkci $P(x)/Q(x)$, kde $P(x)$ a $Q(x)$ jsou mnohočleny, lze vyjádřit ve tvaru

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + R_1(x) + \dots + R_s(x),$$

kde $S(x)$ je mnohočlen a $R_1(x), \dots, R_s(x)$ jsou parciální zlomky. Na libovolném intervalu, který neobsahuje kořeny jmenovatele $Q(x)$, jsou tyto funkce spojité, takže k nim existují primitivní funkce a platí:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int S(x) dx + \int R_1(x) dx + \dots + \int R_s(x) dx.$$

Protože integrace mnohočlenu $S(x)$ je bezproblémová, stačí umět integrovat parciální zlomky.

A) 2.4.1. Integrace parciálních zlomků s reálnými kořeny ve jmenovateli

$$\int \frac{A}{(x-\alpha)^k} dx$$

Nejprve si všimneme parciálních zlomků prvního typu, jejichž jmenovatele mají reálné kořeny. Jejich integrace je snadná. Pro $k = 1$ dostaneme podle vzorce 4 z tabulky 2.1

$$\int \frac{A}{x - \alpha} dx = A \ln |x - \alpha| + c.$$

Pro $k \geq 2$ použijeme substituci a vzorec 3 z tabulky 2.1. Vyjde nám

$$\begin{aligned} \int \frac{A}{(x - \alpha)^k} dx &= \left| \begin{array}{l} x - \alpha = t \\ dx = dt \end{array} \right| = A \int \frac{dt}{t^k} = A \int t^{-k} dt = \\ &= A \frac{t^{-k+1}}{-k+1} + c = \frac{A}{(1-k)t^{k-1}} + c = \frac{A}{(1-k)(x - \alpha)^{k-1}} + c. \end{aligned}$$

Použití si ukážeme na příkladech.



Příklad 2.36. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{3x + 16}{x^2 - x - 6} dx$.

Řešení. Jde o racionální funkci, která je ryze lomená, protože platí $\text{st}(3x + 16) = 1 < \text{st}(x^2 - x - 6) = 2$. Rozložíme ji na parciální zlomky. K tomu potřebujeme kořeny jmenovatele:

$$x^2 - x - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} -2, \\ 3. \end{cases}$$

Platí tedy $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$. Oba kořeny jsou reálné a jednoduché. Ke každému kořenu tudíž přísluší jednočlenný řetězec parciálních zlomků. Tvar rozkladu je

$$\frac{3x + 16}{x^2 - x - 6} = \frac{3x + 16}{(x - 3)(x + 2)} = \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{x + 2},$$

kde A a B jsou vhodné konstanty. Rovnost vynásobíme jmenovatelem $(x - 3)(x + 2)$ a dostaneme rovnost dvou mnohočlenů:

$$3x + 16 = A(x + 2) + B(x - 3).$$

Pro určení konstant A a B je nyní nejrychlejší do rovnosti dosadit postupně oba kořeny. Vyjde:

$$\begin{array}{llll} x = -2 : & 10 = -5B & \Rightarrow & B = -2, \\ x = 3 : & 25 = 5A & \Rightarrow & A = 5. \end{array}$$

Nyní již můžeme vypočítat integrál. Dostaneme:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x + 16}{x^2 - x - 6} dx &= \int \left(\frac{5}{x - 3} - \frac{2}{x + 2} \right) dx = \\ &= 5 \int \frac{dx}{x - 3} - 2 \int \frac{dx}{x + 2} = 5 \ln |x - 3| - 2 \ln |x + 2| + c. \end{aligned}$$

Výsledek platí na kterémkoli z intervalů $(-\infty, -2)$, $(-2, 3)$ a $(3, +\infty)$. ▲



Příklad 2.37. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{1}{x^5 - x^3} dx$.

Řešení. Jde o racionální ryze lomenou funkci, protože $\text{st}(1) = 0 < \text{st}(x^5 - x^3) = 5$. Jmenovatel snadno rozložíme na součin kořenových činitelů. Platí: $x^5 - x^3 = x^3(x^2 - 1) = x^3(x - 1)(x + 1)$. Všechny kořeny jsou reálné: trojnásobný kořen 0, jemuž odpovídá trojčlenný řetězec parciálních zlomků, a jednoduché kořeny 1 a -1 , jimž odpovídají jednočlenné řetězce parciálních zlomků. Předpokládaný tvar rozkladu je tudíž

$$\frac{1}{x^5 - x^3} = \frac{1}{x^3(x - 1)(x + 1)} = \frac{A}{x^3} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x} + \frac{D}{x - 1} + \frac{E}{x + 1}. \quad (2.12)$$

Abychom určili neznámé konstanty A, B, C, D, E , vynásobíme předchozí rovnost jmenovatelem $x^3(x-1)(x+1)$. Dostaneme

$$1 = A(x^2 - 1) + Bx(x^2 - 1) + Cx^2(x^2 - 1) + Dx^3(x + 1) + Ex^3(x - 1). \quad (2.13)$$

Dosadíme reálné kořeny jmenovatele a určíme tři konstanty:

$$\begin{array}{llll} x = 0 : & 1 = -A & \Rightarrow & A = -1, \\ x = 1 : & 1 = 2D & \Rightarrow & D = 1/2, \\ x = -1 : & 1 = 2E & \Rightarrow & E = 1/2. \end{array}$$

Zbývá určit ještě konstanty B a C . K tomu porovnáme koeficienty u stejných mocnin proměnné x na levé a pravé straně rovnosti (2.13). Po roznásobení a úpravách dostaneme

$$1 = (C + D + E)x^4 + (B + D - E)x^3 + (A - C)x^2 - Bx - A.$$

Stačí sestavit dvě vhodné rovnice:

$$\begin{array}{llll} x^1 : & 0 = -B & \Rightarrow & B = 0, \\ x^2 : & 0 = A - C & \Rightarrow & C = -1. \end{array}$$

Samozřejmě je možné určit všechny konstanty porovnáním koeficientů, ale kombinace této metody a dosazení reálných kořenů je obvykle rychlejší.

Nyní již můžeme přistoupit k výpočtu integrálu. Z (2.12) dostaneme

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^5 - x^3} dx &= \int \left(-\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x} + \frac{1/2}{x-1} + \frac{1/2}{x+1} \right) dx = \\ &= -\int \frac{dx}{x^3} - \int \frac{dx}{x} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+1} = \\ &= \frac{1}{2x^2} - \ln|x| + \frac{1}{2} \ln|x-1| + \frac{1}{2} \ln|x+1| + c. \end{aligned}$$

(U prvního integrálu si uvědomte, že $1/x^3 = x^{-3}$.) Výsledek platí na libovolném intervalu, který neobsahuje reálné kořeny jmenovatele, tj. čísla 0, 1 a -1. ▲



Příklad 2.38. Vypočtete neurčitý integrál $\int \frac{x^5 + x^4 - 2x^3 - x^2 + 1}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1} dx$.

Řešení. Tentokrát nejde o ryze lomenou racionální funkci (stupeň čitatele je 5 a stupeň jmenovatele je 3), takže nejprve musíme mnohočleny vydělit. Vyjde nám:

$$\begin{array}{r}
 (x^5 + x^4 - 2x^3 - x^2 + 1) : (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) = x^2 - 2x + 1 \\
 \underline{-(x^5 + 3x^4 + 3x^3 + x^2)} \\
 -2x^4 - 5x^3 - 2x^2 + 1 \\
 \underline{-(-2x^4 - 6x^3 - 6x^2 - 2x)} \\
 x^3 + 4x^2 + 2x + 1 \\
 \underline{-(x^3 + 3x^2 + 3x + 1)} \\
 x^2 - x
 \end{array}$$

Platí tedy, že

$$\frac{x^5 + x^4 - 2x^3 - x^2 + 1}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1} = x^2 - 2x + 1 + \frac{x^2 - x}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}.$$

Vzniklou ryze lomenou funkci musíme rozložit na součet parciálních zlomků. K tomu potřebujeme najít kořeny jmenovatele. Je zřejmé, že platí $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x + 1)^3$. Tedy jmenovatel má jediný kořen -1 , a to trojnásobný. Odpovídá mu řetězec tří parciálních zlomků. Tvar rozkladu bude

$$\frac{x^2 - x}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1} = \frac{x^2 - x}{(x + 1)^3} = \frac{A}{(x + 1)^3} + \frac{B}{(x + 1)^2} + \frac{C}{x + 1}.$$

Po vynásobení jmenovatelem $(x + 1)^3$ a roznásobení pravé strany postupně dostaneme:

$$\begin{aligned}
 x^2 - x &= A + B(x + 1) + C(x + 1)^2, \\
 x^2 - x &= Cx^2 + (2C + B)x + (A + B + C).
 \end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů u stejných mocnin vyjde:

$$\begin{array}{llll}
 x^2 : & 1 = C & \Rightarrow & C = 1, \\
 x^1 : & -1 = 2C + B & \Rightarrow & B = -3, \\
 x^0 : & 0 = A + B + C & \Rightarrow & A = 2.
 \end{array}$$

Platí tedy:

$$\frac{x^2 - x}{(x + 1)^3} = \frac{2}{(x + 1)^3} - \frac{3}{(x + 1)^2} + \frac{1}{x + 1}.$$

Dohromady máme

$$\frac{x^5 + x^4 - 2x^3 - x^2 + 1}{(x+1)^3} = x^2 - 2x + 1 + \frac{2}{(x+1)^3} - \frac{3}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1},$$

takže

$$\begin{aligned} \int \frac{x^5 + x^4 - 2x^3 - x^2 + 1}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1} dx &= \\ &= \int (x^2 - 2x + 1) dx + 2 \int \frac{dx}{(x+1)^3} - 3 \int \frac{dx}{(x+1)^2} + \int \frac{dx}{x+1}. \end{aligned}$$

Vypočítáme a upravíme integrály z prvních dvou parciálních zlomků (třetí je zřejmý).

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x+1)^3} &= \left| \begin{array}{l} x+1 = u \\ dx = du \end{array} \right| = \int \frac{du}{u^3} = \frac{u^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2u^2} = -\frac{1}{2(x+1)^2}, \\ \int \frac{dx}{(x+1)^2} &= \left| \begin{array}{l} x+1 = u \\ dx = du \end{array} \right| = \int \frac{du}{u^2} = \frac{u^{-1}}{-1} = -\frac{1}{u} = -\frac{1}{x+1}. \end{aligned}$$

Celkový výsledek, platný na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(-1, +\infty)$, je tudíž

$$\begin{aligned} \int \frac{x^5 + x^4 - 2x^3 - x^2 + 1}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1} dx &= \\ &= \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x - \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{3}{x+1} + \ln|x+1| + c. \end{aligned}$$

B) 2.4.2. Integrace parciálních zlomků s komplexními kořeny ve jmenovateli

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$$

Nyní si všimneme parciálních zlomků druhého typu. Ty mají ve jmenovateli mocninu kvadratického trojčlenu $x^2 + px + q$, který má záporný diskriminant $p^2 - 4q < 0$, tj. má komplexní kořeny.

1) Nejprve si všimneme případu, kdy $p = 0$. Pak musí být $q > 0$, a můžeme položit $q = a^2$, kde $a > 0$. Půjde tedy o parciální zlomek tvaru

$$\frac{Mx + N}{(x^2 + a^2)^n}, \quad \text{kde } M, N, a \in \mathbb{R}, a > 0, n \in \mathbb{N}.$$

Pak

$$\begin{aligned} \int \frac{Mx + N}{(x^2 + a^2)^n} dx &= \int \left(\frac{Mx}{(x^2 + a^2)^n} + \frac{N}{(x^2 + a^2)^n} \right) dx = \\ &= M \underbrace{\int \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} dx}_I + N \underbrace{\int \frac{1}{(x^2 + a^2)^n} dx}_{II}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

I. $\int \frac{x}{(x^2+a^2)^n} dx$

2) První integrál zvládneme snadno. Pro $n = 1$ vyjde podle vzorce 14 z tabulky 2.1

$$\int \frac{x}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{2} \ln|x^2+a^2| + c = \frac{1}{2} \ln(x^2+a^2) + c,$$

protože pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ je $x^2+a^2 > 0$. $\left| \begin{array}{l} x^2+a^2 = t \\ 2x dx = dt \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln|t| =$

3) Pro $n \geq 2$ použijeme substituci. Dostaneme

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{(x^2+a^2)^n} dx &= \left| \begin{array}{l} x^2+a^2 = u \\ 2x dx = du \\ x dx = \frac{1}{2} du \end{array} \right| = \int \frac{1}{u^n} \cdot \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int u^{-n} du = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{-n+1}}{-n+1} + c = \frac{1}{2(1-n)} \cdot \frac{1}{u^{n-1}} + c = \\ &= \frac{1}{2(1-n)} \cdot \frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}} + c. \end{aligned}$$

II. Druhý integrál z (2.14) nám dá více práce. Označme

$$J_n(x, a) = \int \frac{1}{(x^2+a^2)^n} dx, \quad a > 0.$$

Metodou per partes odvodíme rekurentní vztah

$$J_n(x, a) = \frac{1}{(2n-2)a^2} \cdot \frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{(2n-2)a^2} J_{n-1}(x, a), \quad (2.15)$$

který vyjadřuje pro $n \geq 2$ integrál $J_n(x, a)$ pomocí $J_{n-1}(x, a)$. To nám umožní převést postupně $J_n(x, a)$ až na známý integrál $J_1(x, a)$, uvedený v tabulce 2.1 pod číslem 9:

$$J_1(x) = \int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a} + c.$$

J_2 získáme tak, že použijeme metodu per partes pro $J_1, J_2, J_3, \dots$, aniž bychom museli používat metodu per partes pro $J_2, \dots$

Ukažme platnost vztahu (2.15). Metodou per partes vyjde, že pro $n \geq 2$ je

$$\begin{aligned} J_{n-1} &= \int \frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}} dx = \left| \begin{array}{l} u = \frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}} \quad u' = \frac{-(n-1)2x}{(x^2+a^2)^n} \\ v' = 1 \quad v = x \end{array} \right| = \\ &= \frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + (2n-2) \int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^n} dx = \\ &= \frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + (2n-2) \int \frac{x^2+a^2-a^2}{(x^2+a^2)^n} dx = \\ &= \frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + (2n-2) \int \frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}} dx - (2n-2)a^2 \int \frac{1}{(x^2+a^2)^n} dx = \\ &= \frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + (2n-2)J_{n-1} - (2n-2)a^2 J_n. \end{aligned}$$

Příklad: $\int \frac{dx}{(x^2+2)^2} = J_2$

$$J_1 = \int \frac{dx}{x^2+2} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \arctg \frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctg \frac{x}{\sqrt{2}} + c$$

$$J_1 = \int \frac{dx}{x^2+2} = \left| \begin{array}{l} u = \frac{1}{x^2+2} \quad u' = \frac{-2x}{(x^2+2)^2} \\ v' = 1 \quad v = x \end{array} \right| = \frac{x}{x^2+2} + 2 \int \frac{x^2+2-2}{(x^2+2)^2} dx = \frac{x}{x^2+2} + 2 \int \frac{dx}{x^2+2} - 4 \int \frac{dx}{(x^2+2)^2} = \frac{x}{x^2+2} + 2 J_1 - 4 J_2$$

$$4 J_2 = J_1 + \frac{x}{x^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctg \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{x}{x^2+2} \Rightarrow J_2 = \frac{1}{4\sqrt{2}} \arctg \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4} \frac{x}{x^2+2} + c$$

Dostali jsme rovnici

$$J_{n-1} = \frac{x}{(x^2 + a^2)^{n-1}} + (2n - 2)J_{n-1} - (2n - 2)a^2 J_n,$$

z níž vypočítáme

$$(2n - 2)a^2 J_n = \frac{x}{(x^2 + a^2)^{n-1}} + (2n - 3)J_{n-1},$$

a odtud již po vydělení $(2n - 2)a^2$ plyne vztah (2.15).

Příklad 2.39. Vypočítejte neurčitý integrál $\int \frac{3x - 8}{(x^2 + 2)^3} dx$, $x \in (-\infty, +\infty)$.



Řešení. Jde o parciální zlomek druhého typu, kde $p = 0$ a $q = a^2 = 2$, tj. $a = \sqrt{2}$. Budeme postupovat podle předchozího návodu. Nejprve

$$\int \frac{3x - 8}{(x^2 + 2)^3} dx = 3 \int \frac{x}{(x^2 + 2)^3} dx - 8 \int \frac{1}{(x^2 + 2)^3} dx.$$

Pro první integrál máme

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{(x^2 + 2)^3} dx &= \left| \begin{array}{l} x^2 + 2 = u \\ 2x dx = du \\ x dx = \frac{1}{2} du \end{array} \right| = \int \frac{1}{u^3} \cdot \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int u^{-3} du = \\ &= \frac{1}{2} \frac{u^{-2}}{-2} = -\frac{1}{4u^2} = -\frac{1}{4(x^2 + 2)^2}. \end{aligned}$$

Na druhý integrál použijeme dvakrát vzorec (2.15) — nejprve pro $n = 3$ a pak pro $n = 2$:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x^2 + 2)^3} dx &= J_3(x, \sqrt{2}) = \frac{1}{4 \cdot 2} \cdot \frac{x}{(x^2 + 2)^2} + \frac{3}{4 \cdot 2} J_2(x, \sqrt{2}) = \\ &= \frac{x}{8(x^2 + 2)^2} + \frac{3}{8} \left(\frac{1}{2 \cdot 2} \cdot \frac{x}{x^2 + 2} + \frac{1}{2 \cdot 2} J_1(x, \sqrt{2}) \right) = \\ &= \frac{x}{8(x^2 + 2)^2} + \frac{3x}{32(x^2 + 2)} + \frac{3}{32} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Celkově tedy vyjde

$$\int \frac{3x - 8}{(x^2 + 2)^3} dx = -\frac{3}{4(x^2 + 2)^2} - \frac{x}{(x^2 + 2)^2} - \frac{3x}{4(x^2 + 2)} - \frac{3}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + c. \quad \blacktriangle$$



Na závěr si všimneme parciálních zlomků druhého typu v případě, že $p \neq 0$. Postup bude obdobný jako v případě $p = 0$, tj. parciální zlomek rozdělíme na dvě vhodné části, jen úpravy budou trochu složitější. Čitatel prvního zlomku vytvoříme tak, aby byl násobkem derivace trojčlenu $x^2 + px + q$, tj. dvojčlenu $2x + p$. Najdeme tudíž vhodná čísla r a s tak, aby

$$\frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^n} = \frac{r(2x + p) + s}{(x^2 + px + q)^n} = r \frac{2x + p}{(x^2 + px + q)^n} + s \frac{1}{(x^2 + px + q)^n}.$$

Pro čísla r a s musí platit

$$Mx + N = r(2x + p) + s = 2rx + (pr + s) \quad \Rightarrow \quad M = 2r, \quad N = pr + s,$$

z čehož dostáváme $r = M/2$, $s = N - pM/2$. Tyto vztahy si pochopitelně nebudeme pamatovat, na každém konkrétním příkladě čísla r a s porovnáním koeficientů snadno určíme.

Bude tedy

$$\int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^n} dx = r \int \frac{2x + p}{(x^2 + px + q)^n} dx + s \int \frac{1}{(x^2 + px + q)^n} dx.$$

I. $\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n} dx$ První integrál vypočítáme obdobně jako první integrál v (2.14). Pro $n = 1$ je

$$\int \frac{2x + p}{x^2 + px + q} dx = \ln|x^2 + px + q| + c = \ln(x^2 + px + q) + c,$$

$\int \frac{x+p/2}{x^2+px+q} dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| = \ln|x^2+px+q|$

protože jmenovatel je vždy kladný (grafem funkce $y = x^2 + px + q$ je parabola rozevřená nahoru, která neprotne osu x , tedy příslušná kvadratická rovnice má komplexní kořeny).

ii) Pro $n \geq 2$ použijeme substituci:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x + p}{(x^2 + px + q)^n} dx &= \left| \begin{array}{l} x^2 + px + q = u \\ (2x + p) dx = du \end{array} \right| = \int \frac{du}{u^n} = \\ &= \frac{1}{1-n} \cdot \frac{1}{u^{n-1}} + c = \frac{1}{1-n} \cdot \frac{1}{(x^2 + px + q)^{n-1}} + c. \end{aligned}$$

ii. $\int \frac{1}{(x^2+px+q)^n} dx$ Druhý integrál převedeme substitucí na výpočet integrálu J_n . Nejprve doplníme trojčlen $x^2 + px + q$ na úplný čtverec:

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q - p^2}{4}.$$

Vzhledem k předpokladu, že diskriminant $p^2 - 4q$ je záporný, platí $(4q - p^2)/4 > 0$, takže můžeme položit $(4q - p^2)/4 = a^2$, kde $a > 0$. Nyní

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x^2 + px + q)^n} dx &= \int \frac{1}{[(x + p/2)^2 + a^2]^n} dx = \left| \begin{array}{l} x + \frac{p}{2} = u \\ dx = du \end{array} \right| = \\ &= \int \frac{1}{(u^2 + a^2)^n} du = J_n(u, a). \end{aligned}$$

Postup si ukážeme na příkladu.

Příklad 2.40. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{5x+1}{x^2+x+1} dx$, $x \in (-\infty, +\infty)$.



Řešení. Trojčlen $x^2 + x + 1$ ve jmenovateli má diskriminant $1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3$, který je záporný, takže jeho kořeny jsou komplexní. Jde tudíž o parciální zlomek druhého typu. Derivace jmenovatele je $2x + 1$. Čitatel $5x + 1$ proto upravíme na tvar $r(2x + 1) + s$. Musí tedy platit

$$5x + 1 = r(2x + 1) + s = 2rx + (r + s) \quad \Rightarrow \quad 5 = 2r, \quad 1 = r + s.$$

To znamená, že $r = 5/2$ a $s = -3/2$. Zadání bude mít po rozdělení tvar

$$\frac{5x+1}{x^2+x+1} = \frac{\frac{5}{2}(2x+1) - \frac{3}{2}}{x^2+x+1} = \frac{5}{2} \frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{3}{2} \frac{1}{x^2+x+1},$$

a tedy

$$\int \frac{5x+1}{x^2+x+1} dx = \frac{5}{2} \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx - \frac{3}{2} \int \frac{1}{x^2+x+1} dx. \quad (2.16)$$

První ze vzniklých integrálů je snadný (v čitateli je derivace jmenovatele):

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx = \ln(x^2+x+1).$$

Před výpočtem druhého integrálu doplníme trojčlen $x^2 + x + 1$ na úplný čtverec:

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Nyní dostaneme s použitím vzorce 9 z tabulky 2.1, kde $a = \sqrt{3}/2$:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2+x+1} dx &= \int \frac{1}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx = \left| \begin{array}{l} x + \frac{1}{2} = u \\ dx = du \end{array} \right| = \int \frac{1}{u^2 + \frac{3}{4}} du = \\ &= \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \operatorname{arctg} \frac{u}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2\left(x + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Dosazením dílčích výsledků do (2.16) dostaneme celkem, že

$$\begin{aligned} \int \frac{5x+1}{x^2+x+1} dx &= \frac{5}{2} \ln(x^2+x+1) - \frac{3}{2} \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c = \\ &= \frac{5}{2} \ln(x^2+x+1) - \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c. \end{aligned}$$

2.4.3. Integrace parciálních zlomků s reálnými a komplexními kořeny ve jmenovateli



Příklad 2.41. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{x^3 + 3x^2 + 4}{x^3 + x - 2} dx$.

Řešení. Z příkladu číslo 2.35 víme, že rozklad na parciální zlomky bude vypadat následovně:

$$\frac{x^3 + 3x^2 + 4}{x^3 + x - 2} = 1 + \frac{2}{x - 1} + \frac{x - 2}{x^2 + x + 2}.$$

Zlomek $\frac{x - 2}{x^2 + x + 2}$ před integrací upravíme následovně:

$$\frac{x - 2}{x^2 + x + 2} = \frac{\frac{1}{2}(2x + 1)}{x^2 + x + 2} - \frac{\frac{5}{2}}{(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}}.$$

Po integraci obdržíme:

$$\int \frac{x^3 + 3x^2 + 4}{x^3 + x - 2} dx = x + 2 \ln |x - 1| + \frac{1}{2} \ln(x^2 + x + 2) + \frac{5}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2x + 1}{\sqrt{7}} + c.$$



Příklad 2.42. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{2x^3 + 8x^2 - 8x - 22}{(x + 3)^2(x^2 + 1)} dx$.

Řešení. Jmenovatel má dvojnásobný reálný kořen -3 a v reálném oboru nerozložitelný činitel $x^2 + 1$. Rozklad má tedy tvar:

$$\frac{2x^3 + 8x^2 - 8x - 22}{(x + 3)^2(x^2 + 1)} = \frac{A}{(x + 3)^2} + \frac{B}{x + 3} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1}.$$

Po vynásobení vyjde:

$$\begin{aligned} 2x^3 + 8x^2 - 8x - 22 &= A(x^2 + 1) + B(x + 3)(x^2 + 1) + (Cx + D)(x + 3)^2, \\ 2x^3 + 8x^2 - 8x - 22 &= Ax^2 + Ax + Bx^3 + 3Bx^2 + Bx + 3B + Cx^3 + 6Cx^2 + \\ &\quad + 9Cx + Dx^2 + 6Dx + 9D, \\ 2x^3 + 8x^2 - 8x - 22 &= x^3(B + C) + x^2(A + 3B + 6C + D) + \\ &\quad + x(A + B + 9C + 6D) + 3B + 9D. \end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů obdržíme: $A = 2$, $B = 1$, $C = 1$, $D = -3$. Tedy

$$\frac{2x^3 + 8x^2 - 8x - 22}{(x + 3)^2(x^2 + 1)} = \frac{2}{(x + 3)^2} + \frac{1}{x + 3} + \frac{x - 3}{x^2 + 1}.$$

$$\int \frac{2x^3 + 8x^2 - 8x - 22}{(x+3)^2(x^2+1)} dx = \int \frac{2}{(x+3)^2} dx + \int \frac{1}{x+3} dx + \int \frac{x-3}{x^2+1} dx.$$

Třetí integrál je třeba ještě upravit takto:

$$\int \frac{x-3}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx - 3 \int \frac{1}{x^2+1} dx.$$

Po integraci obdržíme

$$\int \frac{2x^3 + 8x^2 - 8x - 22}{(x+3)^2(x^2+1)} dx = \frac{-2}{(x+3)} + \ln|x+3| + \frac{1}{2} \ln|x^2+1| - 3 \operatorname{arctg} x + c.$$

▲

Průvodce studiem



1) Integrace racionální lomené funkce sestává ze dvou částí:

- z rozkladu na parciální zlomky (a případně dělení u neryze lomené funkce),
- z integrace jednotlivých zlomků (a případně mnohočlenu u neryze lomené funkce).

Tyto části mohou být různě dlouhé. Často zabere první část většinu doby řešení příkladu a vlastní integrace je velmi rychlá. Je to typické, pokud má jmenovatel jen reálné kořeny. V případě komplexních kořenů, zejména pokud jsou násobné, může být integrace velmi zdoluhavá.

- 2) Uvědomte si, že prakticky můžeme integraci provést, jen když dokážeme najít rozklad na parciální zlomky, k čemuž potřebujeme kořeny jmenovatele. Avšak nalézt kořeny mnohočlenů vyšších stupňů obecně neumíme (umíme řešit kvadratickou rovnici, pro rovnice třetího a čtvrtého stupně existují vzorce, které jsou ale pro praktické použití příliš složité, pro rovnice stupně pět a více obecně tzv. řešení pomocí radikálů neexistuje — viz [12]). Uživatelé na tuto skutečnost často zapomínají a považují integraci racionálních lomených funkcí za bezproblémovou (maximálně zdoluhavou) záležitost. Pokud však nejde o školské úlohy nachystané tak, aby „pěkně vyšly“, ale o úlohy z praxe, kde koeficienty mnohočlenů jsou získány např. měřením, je opak pravdou.
- 3) Z předchozího je vidět, že výsledek neurčitého integrálu z racionální lomené funkce dostaneme při výše popsáních postupech ve tvaru součtu, kde jako sčítance se mohou objevit pouze určité funkce (pokud nesloučíme logaritmy a pod. nebo pokud neuděláme nějakou umělou úpravu, jako že např. místo x budeme psát $e^{\ln x}$). Jsou to

- mnohočleny,
- racionální lomené funkce,

(3) Nechť p je polynom ax^2+bx+c a $a < 0, c < 0$. Pak ax^2+bx+c má dvě reálné kořeny x_1, x_2 (když takové reálné kořeny jsou, pak by ax^2+bx+c byl < 0 pro $\forall x \in \mathbb{R}$ a $\sqrt{ax^2+bx+c}$ by nebyl reálný). Pak pro $x \in (x_1, x_2)$ platí: $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2) > 0$. Upravíme nyní tvar:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = (x-x_1) \sqrt{\frac{a(x-x_2)}{(x-x_1)}}$$

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx = \int R(x, (x-x_1) \sqrt{\frac{a(x-x_2)}{(x-x_1)}}) dx$$

↓
integrál typu 2.6.1., kde $n=2$

Příklad: $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+5x-6}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-(x^2-5x+6)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-(x-2)(x-3)}} = \int \frac{dx}{(x-2) \sqrt{\frac{3-x}{x-2}}}$

↓
převod na interval (2,3) 2.6.1.

$$t = \sqrt{\frac{3-x}{x-2}} \Rightarrow t^2 = \frac{3-x}{x-2}$$

$$x = \frac{3+2t^2}{t^2+1}$$

$$dx = \frac{4t^3+4t-6t-4t^3}{(t^2+1)^2} dt = \frac{-2t+4t}{(t^2+1)^2} dt = \frac{2t}{(t^2+1)^2} dt$$

$$x-2 = \frac{3+2t^2-2t^2-2}{t^2+1} = \frac{1}{t^2+1}$$

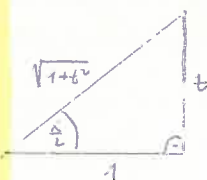
$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+5x-6}} = \int \frac{dx}{(x-2) \sqrt{\frac{3-x}{x-2}}} = \int \frac{\frac{2t}{(t^2+1)^2}}{\frac{1}{t^2+1} \cdot t} dt = \int \frac{2t}{t^2+1} dt = 2 \arctan t + C = 2 \arctan \sqrt{\frac{3-x}{x-2}} + C$$

§5.

~~2.7.~~ Integrály typu $\int R(\sin x, \cos x) dx$:

4. metoda

(A) Substituce $\lg \frac{x}{2} = t$ se vždy kulo integruje. převádí se integrál z nec. lom. fr. pomocí t .



$$\sin \frac{x}{2} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$\cos \frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\lg \frac{x}{2} = t \Rightarrow \frac{x}{2} = \arctan t$$

$$x = 2 \arctan t$$

$$dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

Příklad: $\int \frac{dx}{1-\cos x + \sin x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1 - \frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{1+t^2-1+t^2+2t} = \int \frac{2dt}{t(t+1)} = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right) dt = \lg \left| \frac{t}{t+1} \right| + C = \lg \left| \frac{\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}+1} \right| + C$

tytožt integrálů substituce $\lg \frac{x}{2} = t$ může být někdy doc. zvláštní. A proto vhodné používat substituce, které jsou univerzální, pokud je to s harmonickými možno.

Substituce $\lg \frac{x}{2} = t$ pak používáme pouze v těch případech, kdy máme funkci sestávající z harmonických a méně pravidelných.

B) Je-li funkce $R(\sin x, \cos x)$ lichá vzhledem k proměnné $\sin x$ (tj. $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$), použijeme substituci $\cos x = t$.

Průběh: $\int \frac{\sin^3 x \, dx}{\cos^2 x} = - \int \frac{1-t^2}{t^2} dt = \frac{1}{t} + t = \frac{1}{\cos x} + \cos x + C$

$\cos x = t$

$-\sin x \, dx = dt$

C) Je-li funkce $R(\sin x, \cos x)$ lichá vzhledem k proměnné $\cos x$ (tj. $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$), použijeme substituci $\sin x = t$.

Průběh: $\int \frac{\cos^3 x \, dx}{1-\sin^2 x} = \int \frac{1-t^2}{1-t^2} dt = \int \frac{(1-t)(1+t)}{(1-t)(t^2+t+1)} dt = \int \frac{1+t}{t^2+t+1} dt = \frac{1}{2} \int \frac{(2t+1)+1}{t^2+t+1} dt$

$\sin x = t$

$\cos x \, dx = dt$

$= \frac{1}{2} \lg(t^2+t+1) + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{(t+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{2} \lg(t^2+t+1) + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{dt}{1 + \left(\frac{2(t+\frac{1}{2})}{\sqrt{3}} \right)^2} \right) =$

$\frac{2t+1}{\sqrt{3}} = u$
 $du = \frac{2}{\sqrt{3}} dt$

$= \frac{1}{2} \lg(t^2+t+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{2} \lg(t^2+t+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C =$

$= \frac{1}{2} \lg(t^2+t+1) = \frac{1}{2} \lg(\sin^2 x + \sin x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2\sin x + 1}{\sqrt{3}} + C$

D) Je-li funkce $R(\sin x, \cos x)$ lichá vzhledem k oběma proměnným $\sin x$ a $\cos x$ (tj. $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$), použijeme substituci $\lg x = t$.

Průběh: $\int \frac{2 \cos^3 x - \sin x}{2 \sin x + \cos x} dx =$

$\lg x = t \Rightarrow x = \arcsin t$

$dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$

$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$

$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$

$= \int \frac{\frac{2}{\sqrt{1-t^2}} - \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}}{\frac{2t}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}} \cdot \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int \frac{2-t}{(1-t)(1+t)} dt = \int \left(\frac{A}{1-t} + \frac{B+C}{1+t} \right) dt =$

$2-t = A(1+t) + B(1-t)^2 + C(1-t)$

$0 = A - 2B$

$-1 = 0 - 2C$

$2 = A + C$

$B = \frac{1}{2}$

$C = 1 - A$

$-1 = \frac{1}{2} - 1 + 2A$

$0 = \frac{1}{2} A - 2$

$A = \frac{8}{3}$

$B = \frac{1}{2}$

$C = \frac{2}{3}$

$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3} \lg|1-t| + \frac{1}{2} \int \frac{3+t}{1+t} dt = -\frac{4}{3} \lg|1-t| + \frac{1}{2} \arctg t + \frac{3}{2} \int \frac{dt}{t^2+1} =$

$= -\frac{4}{3} \lg|1-t| + \frac{1}{2} \arctg t + \frac{3}{2} \lg(t^2+1) + C = \frac{3}{2} \lg \frac{1+t^2}{(1-t)^2} + \frac{1}{2} \arctg t + C =$

$= \frac{3}{2} \lg \frac{1+\sin^2 x}{(1-\sin x)^2} + \frac{1}{2} x + C = -\frac{3}{2} \lg(\cos x - \sin x) + \frac{1}{2} x + C =$

$= -\frac{3}{2} \lg|\cos x - \sin x| + \frac{1}{2} x + C$

E)

Průběh: Parametry: integrály $\int \cos^2 x \, dx$, $\int \sin^2 x \, dx$ můžeme substitucí $\lg x = t$, ale zjednodušíme:

$\int \cos^2 x \, dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x + C$

$\int \sin^2 x \, dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + C$

Je výhodnější: $\int \sin^2 x \, dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2} \right) dx$, $\int \cos^2 x \, dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2} \right) dx$

- i) $2 \operatorname{arctg}\left(\frac{5}{3} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{4}{3}\right),$ j) $\frac{1}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} - 2 \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|,$
- k) $\operatorname{arctg}\left(2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right),$
- l) $\ln\left(\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 3\right) - \ln\left(\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1\right) + \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right).$
4. a) $-\frac{2}{3 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1},$ b) $\sqrt{5} \operatorname{arctg}\left[\frac{\sqrt{5}}{5}\left(3 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1\right)\right],$
- c) $\ln |1 + \operatorname{tg} z| - \frac{1}{2} \ln(1 + \operatorname{tg}^2 z),$ d) $\operatorname{tg} u + \ln |\operatorname{tg} u|,$
- e) $\frac{1}{\cos^2 \omega},$ f) $-\frac{1}{\operatorname{tg}^3 x},$
- g) $-\operatorname{arctg}(2 \cos^2 x - 1)$ resp. $\operatorname{arctg} \operatorname{tg}^2 x,$ h) $\frac{3}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} - \frac{1}{\operatorname{tg}^3 \frac{x}{2}},$
- i) $2 \ln |1 + \operatorname{tg} x| - \ln(1 + \operatorname{tg}^2 x) + 2x,$ j) $\frac{-1}{\operatorname{tg} + 1},$
- k) $\operatorname{tg}^3 \alpha + 3 \operatorname{tg} \alpha,$ l) $\frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2} \operatorname{tg} x\right).$
5. a) $\frac{-\cos x}{2} + \cos \frac{x}{2},$ b) $\frac{1}{8} (2 \sin 2x - \sin 4x),$
- c) $\frac{1}{14} (\sin 7x + 7 \sin x),$ d) $-\frac{\cos 12x}{24} + \frac{\cos 2x}{4},$
- e) $-\frac{\cos(\sqrt{3} + 1)x}{2(\sqrt{3} + 1)} - \frac{\cos(\sqrt{3} - 1)x}{2(\sqrt{3} - 1)},$ f) $\frac{1}{4} (2 \sin x + \sin 2x).$

§ 6.

2.5.2. Integrály obsahující odmocniny

A) Jako prvního si všimneme integrálu tvaru

$$\int R(x, \sqrt[s]{x}) dx, \quad \text{kde } s \in \mathbb{N}, s \geq 2. \quad (2.26)$$

Ukažme si několik příkladů takových integrálů.

$$R(x, \sqrt{x}) = \frac{x + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x}}, \quad R(x, \sqrt[4]{x}) = \frac{x \sqrt[4]{x}}{1 + \sqrt[4]{x}}, \quad R(x, \sqrt[3]{x}) = \frac{\sqrt[3]{x}}{x + \sqrt[3]{x}}.$$

Poznámka 2.54. Názorně řečeno, jde o funkce, které dostaneme z funkcí x a $\sqrt[s]{x}$ a reálných čísel pomocí *konečně mnoha* aritmetických operací (sečítání, odčítání, násobení a dělení).

Substituce $x = t^s$ převede integrál (2.26) na integrál z racionální lomené funkce. (2. substituce! metoda)
Postup si ukážeme na příkladu.

Příklad 2.55. Vypočítejte neurčitý integrál $\int \frac{x^2 + \sqrt{x} + 1}{x + \sqrt{x}} dx$, $x \in (0, \infty)$.



Řešení. Zvolíme tedy substituci $x = t^2$, tj. $t = \sqrt{x}$. Vyjde nám:

$$\int \frac{x^2 + \sqrt{x} + 1}{x + \sqrt{x}} dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x} = t \\ x = t^2 \\ dx = 2t dt \end{array} \right| = \int \frac{t^4 + t + 1}{t^2 + t} \cdot 2t dt = 2 \int \frac{t^4 + t + 1}{t + 1} dt,$$

což je integrál z racionální neryze lomené funkce. Je tedy potřeba ji upravit na součet mnohočlenu a ryze lomené racionální funkce. To je možné udělat běžným algoritmem pro dělení mnohočlenů. Tedy

$$\frac{t^4 + t + 1}{t + 1} = t^3 - t^2 + t + \frac{1}{t + 1}.$$

Celkový výsledek bude

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + \sqrt{x} + 1}{x + \sqrt{x}} dx &= 2 \int \left(t^3 - t^2 + t + \frac{1}{t + 1} \right) dt = \\ &= 2 \left(\frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + \ln |t + 1| \right) + c = \frac{x^2}{2} - \frac{2}{3} x \sqrt{x} + x + 2 \ln |\sqrt{x} + 1| + c. \end{aligned}$$

3) V předchozím příkladu figuroval pouze jeden typ odmocniny. V integrandu se však mohou vyskytnout odmocniny různých typů. Ty se však dají vyjádřit jako mocniny o stejném základu. Proto se integrál (2.26), tj. integrál typu $\int R(x, \sqrt[s_1]{x}, \dots, \sqrt[s_k]{x}) dx$, někdy píše ve tvaru

$$\int S(x, \sqrt[s_1]{x}, \dots, \sqrt[s_k]{x}) dx, \quad (2.27)$$

kde $k \in \mathbb{N}$, $s_1 \geq 2, \dots, s_k \geq 2$ jsou přirozená čísla a S je racionální funkce $k + 1$ proměnných. Tento integrál budeme řešit pomocí následující substituce.

Označíme-li s nejmenší společný násobek čísel $s_1, \dots, s_k$, je každá s_i -tá odmocnina přirozenou mocninou s -té odmocniny: $\sqrt[s_i]{x} = (\sqrt[s]{x})^{s/s_i}$, kde $i = 1, \dots, k$. Je tedy integrál typu (2.27), který je zdánlivě obecnější, protože obsahuje více různých odmocnin, ve skutečnosti naprosto rovnocenný integrálu typu (2.26) a lze ho opět řešit obdobnou substitucí $x = t^s$, kde s je zmíněný nejmenší společný násobek čísel $s_1, \dots, s_k$ (nebo jakýkoli větší celočíselný násobek čísla s , ale tím bychom dostali zbytečně vysoké mocniny nové proměnné t a integrace vzniklé racionální lomené funkce by pravděpodobně byla daleko obtížnější).

Příklad 2.56. Vypočítejte neurčitý integrál $\int \frac{1 + \sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{x + \sqrt[6]{x^5}} dx$, $x \in (0, +\infty)$.



Řešení. Jedná se o integrál typu (2.27). Zvolíme tedy substituci $x = t^6$, tj. $t = \sqrt[6]{x}$, splňující předpoklady věty 2.27. Vyjde

$$\begin{aligned} \int \frac{1 + \sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{x + \sqrt[6]{x^5}} dx &= \left| \begin{array}{l} \sqrt[6]{x} = t \\ x = t^6 \\ dx = 6t^5 dt \end{array} \right| = \int \frac{1 + t^3 - t^2}{t^6 + t^5} 6t^5 dt = \\ &= \int \frac{6t^5(t^3 - t^2 + 1)}{t^5(t + 1)} dt = \int \frac{6t^3 - 6t^2 + 6}{t + 1} dt, \end{aligned}$$

což je integrál z racionální neryze lomené funkce. Je tudíž potřeba upravit ji na součet mnohočlenu a ryze lomené racionální funkce. Běžným algoritmem pro dělení mnohočlenů dostaneme

$$\frac{6t^3 - 6t^2 + 6}{t + 1} = 6t^2 - 12t + 12 - \frac{6}{t + 1},$$

což je funkce, kterou můžeme rovnou integrovat. Celkový výsledek bude

$$\begin{aligned} \int \frac{1 + \sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{x + \sqrt[6]{x^5}} dx &= \int \left(6t^2 - 12t + 12 - \frac{6}{t + 1} \right) dt = \\ &= 2t^3 - 6t^2 + 12t - 6 \ln |t + 1| + c = \\ &= 2\sqrt{x} - 6\sqrt[3]{x} + 12\sqrt[6]{x} - 6 \ln(\sqrt[6]{x} + 1) + c. \end{aligned}$$

c) **Integrál** Další typ, kterým se budeme zabývat, má tvar

$$\int R(x, \sqrt[6]{ax + b}) dx, \quad (2.28)$$

kde $s \in \mathbb{N}$, $s \geq 2$, $a, b \in \mathbb{R}$. Všimněme si, že pokud $a = 1$ a $b = 0$ dostáváme integrál typu (2.26).

Substituce určená rovností $t^s = ax + b$ převede tento integrál na integrál z racionální lomené funkce. Musíme z této rovnosti nejprve osamostatnit proměnnou x a pak vypočítat diferenciál. Tedy

$$t^s = ax + b \Rightarrow x = \frac{t^s - b}{a} \quad \text{a} \quad dx = \frac{st^{s-1}}{a} dt.$$

Použití si opět ukážeme na příkladu.



Příklad 2.57. Vypočítejte neurčitý integrál $\int \frac{\sqrt{x+1} + 1}{\sqrt{x+1} - 1} dx$, $x \in (0, \infty)$.

Řešení. Zavedeme substituci $x + 1 = t^2$, tj. $t = \sqrt{x+1}$. Dostaneme

$$\int \frac{\sqrt{x+1} + 1}{\sqrt{x+1} - 1} dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x+1} = t \\ x+1 = t^2 \\ dx = 2t dt \end{array} \right| = \int \frac{t+1}{t-1} \cdot 2t dt,$$

což je integrál z racionální neryze lomené funkce. Po vydělení obdržíme

$$\frac{t^2 + t}{t - 1} = t + 2 + \frac{2}{t - 1}.$$

Výsledek bude

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x+1} + 1}{\sqrt{x+1} - 1} dx &= 2 \int \left(t + 2 + \frac{2}{t-1} \right) dt = 2 \left(\frac{t^2}{2} + 2t + 2 \ln(t-1) \right) + c = \\ &= x + 1 + 4\sqrt{x+1} + 4 \ln(\sqrt{x+1} - 1) + c. \end{aligned}$$

D) **Integrál** Další typ, kterým se budeme zabývat, má tvar:

$$\int R\left(x, \sqrt[s]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx, \quad (2.29)$$

kde $s \in \mathbb{N}$, $s \geq 2$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad - bc \neq 0$.

Podmínka $ad - bc \neq 0$ zaručuje, že se zlomek $\frac{ax+b}{cx+d}$ nevykrátí na konstantu jako např. $\frac{4x-2}{2x-1} = 2$.

Dále si všimněte, že pro $a = d = 1$ a $b = c = 0$ dostáváme integrál typu (2.26), jde tedy o jeho zobecnění.

Substituce určená rovností $t^s = \frac{ax+b}{cx+d}$ převede integrál (2.29) na integrál z racionální lomené funkce. Jde o substituci ve smyslu věty 2.27. Musíme tedy z této rovnosti nejprve osamostatnit starou proměnnou x a pak teprve počítat diferenciál:

$$\begin{aligned} t^s &= \frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow cxt^s + dt^s = ax+b \Rightarrow x(ct^s - a) = b - dt^s \\ &\Rightarrow \varphi: x = \frac{b - dt^s}{ct^s - a}, \end{aligned}$$

takže

$$\begin{aligned} dx &= \left(\frac{b - dt^s}{ct^s - a} \right)' dt = \frac{-sdt^{s-1}(ct^s - a) - (b - dt^s)sct^{s-1}}{(ct^s - a)^2} dt = \\ &= \frac{s(ad - bc)t^{s-1}}{(ct^s - a)^2} dt. \end{aligned}$$

Výsledek si samozřejmě nebudeme pamatovat, ale na každém konkrétním zadání osamostatníme starou proměnnou x a spočítáme její diferenciál.

Do výsledného integrálu musíme dosadit za t inverzní funkci $\varphi^{-1}(x)$, jejíž určení je však snadné:

$$\varphi^{-1}: t = \sqrt[s]{\frac{ax+b}{cx+d}}.$$



Příklad 2.58. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} dx$, $x \in (1, +\infty)$.

Řešení. Jde o integrál typu (2.29). Zvolíme substituci, jež je určena rovností $\frac{x+1}{x-1} = t^2$, a osamostatníme x , tj. určíme funkci $\varphi(t)$:

$$\frac{x+1}{x-1} = t^2 \Rightarrow xt^2 - t^2 = x + 1 \Rightarrow x(t^2 - 1) = t^2 + 1 \Rightarrow \varphi: x = \frac{t^2 + 1}{t^2 - 1}.$$

Dále si připravíme diferenciál:

$$dx = \left(\frac{t^2 + 1}{t^2 - 1} \right)' dt = \frac{2t(t^2 - 1) - (t^2 + 1)2t}{(t^2 - 1)^2} dt = \frac{-4t}{(t^2 - 1)^2} dt.$$

Určíme ještě inverzní funkci $\varphi^{-1}(x)$ potřebnou pro použití věty 2.27:

$$\varphi^{-1}: t = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$$

(Podrobnějším rozбором průběhu funkce $\varphi(t)$ lze ověřit, že při označení z věty 2.27 jsme volili $J = I = (1, +\infty)$. Jiná varianta by byla $J = (1, +\infty)$, $I = (-\infty, -1)$, pak by ovšem platilo, že $\varphi^{-1}(x) = -\sqrt{(x+1)/(x-1)}$.)

Nyní provedeme substituci. Dostaneme:

$$\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} dx = \int \frac{1}{\frac{t^2+1}{t^2-1}} \cdot t \cdot \frac{-4t}{(t^2-1)^2} dt = \int \frac{-4t^2}{(t^2-1)(t^2+1)} dt,$$

což je integrál z ryze lomené racionální funkce.

Integrand rozložíme na parciální zlomky. Rozklad jmenovatele na součin ireducibilních činitelů v reálném oboru je zřejmě $(t-1)(t+1)(t^2+1)$, takže tvar rozkladu na součet parciálních zlomků bude

$$\frac{-4t^2}{(t-1)(t+1)(t^2+1)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} + \frac{Ct+D}{t^2+1},$$

kde A , B , C a D jsou vhodné konstanty. Po vynásobení jmenovatelem obdržíme

$$-4t^2 = A(t+1)(t^2+1) + B(t-1)(t^2+1) + (Ct+D)(t^2-1).$$

Nejprve dosadíme reálné kořeny 1 a -1 , čímž určíme dvě konstanty:

$$\begin{array}{lll} t = 1 : & -4 = 4A & \Rightarrow A = -1, \\ t = -1 : & -4 = -4B & \Rightarrow B = 1. \end{array}$$

Dále sestavíme ještě dvě rovnice porovnáním koeficientů u vhodných mocnin. I bez roznásobení je vidět, že platí:

$$\begin{aligned} t^3: \quad 0 &= A + B + C & \Rightarrow & C = 0, \\ t^0: \quad 0 &= A - B - D & \Rightarrow & D = -2. \end{aligned}$$

Dostáváme

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} dx &= \int \left(-\frac{1}{t-1} + \frac{1}{t+1} - \frac{2}{t^2+1} \right) dt = \\ &= -\ln|t-1| + \ln|t+1| - 2 \operatorname{arctg} t + c = \\ &= -\ln \left| \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - 1 \right| + \ln \left| \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + 1 \right| - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + c. \end{aligned}$$

Výsledek je možné zjednodušit. Zkuste si jako cvičení ověřit, že platí

$$\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} dx = 2 \ln(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}) - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + c$$

(konstanty c nejsou v obou výsledcích stejné, liší se o $\ln 2$).

První výsledek je platný i na intervalu $(-\infty, -1)$. Zkuste si rozmyslet, jak by na tomto intervalu vypadala upravená verze. ▲

I integrály typu (2.28) a (2.29) je možné zobecnit na případ, kdy integrand obsahuje více různých odmocnin z téhož lineárního členu resp. zlomku. O skutečné zobecnění ale nejde, situace je stejná jako u dvojice typů (2.26) a (2.27).

E) Dalším typem integrálů s odmocninami, které lze převést na integrály z racionálních lomených funkcí, je

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx, \quad \text{kde } a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0. \quad (2.30)$$

Zde R je racionální funkce dvou proměnných. Přitom předpokládáme, že kvadratický trojčlen nemá dvojnásobný kořen, tj. že platí $b^2 - 4ac \neq 0$ (jinak by se odmocnina zrušila).

Omezíme se na případ, kdy $b = 0$ (pak je nutně $c \neq 0$), a ukážeme si řešení pomocí goniometrických substitucí.

Pro zájemce:

Integrály typu (2.30) se obvykle řeší pomocí tzv. Eulerových¹ substitucí — viz např. [8, 17]. Z časových důvodů se jimi nebudeme zabývat. Pro naše účely z hlediska aplikací postačí dále

¹Leonard Euler (1707–1783) (čti ojler) — švýcarský matematik, fyzik, mechanik a astronom. Působil převážně v Petrohradě. Jeden z největších matematiků všech dob. Napsal kolem 850 prací (včetně mnohdyhodných monografií). Ovlivnil všechny základní matematické disciplíny. Od r. 1766 byl slepý (diktoval svým žákům).



uvedené speciální případy. Navíc obvykle půjde pouze o integrály ze samotných odmocnin, kdy goniometrické substituce vedou poměrně rychle k cíli. Mimoto doplněním kvadratického trojčlenu $ax^2 + bx + c$ na úplný čtverec a pomocnou substitucí lze obecný případ převést na případ $b = 0$ — srv. postup při integraci parciálního zlomku $1/(x^2 + px + q)^n$ na str. 52.

Uvedeme jen pro představu, jak Eulerovy substituce vypadají. Jde o tři substituce (první dvě pokrývají všechny případy, ale třetí je někdy výhodnější). Novou proměnnou označíme t .

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{|a|} t(x - \alpha), \quad \text{když } b^2 - 4ac > 0 \ (\alpha \text{ je kořen } ax^2 + bx + c = 0),$$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm \sqrt{a} x \pm t, \quad \text{když } b^2 - 4ac < 0, \ a > 0,$$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm xt \pm \sqrt{c}, \quad \text{když } c > 0.$$

Příslušný vztah se vždy umocní a osamostatní se x (x^2 se zruší). Vztah mezi x a t je dán racionální funkcí. Pak se teprve vypočítá diferenciál dx . Integrál (2.30) přejde v integrál z racionální lomené funkce. Ukázky použití viz např. [17, 18].

V případě, že v integrálu typu (2.30) je $b = 0$, se (po vytknutí $|a|$) mohou podle znamének koeficientů vyskytnout celkem tři typy odmocnin. U každého typu současně uvedeme, pomocí jaké substituce lze daný integrál převést na integrál typu $S(\cos x, \sin x)$, kde $S(u, v)$ je racionální funkce dvou proměnných u, v , který už umíme řešit. V dalším $k > 0$ značí konstantu.

$$\int R(x, \sqrt{k^2 - x^2}) dx \quad x = k \sin t, \quad t \in (-\pi/2, \pi/2) \quad (2.31)$$

$$\int R(x, \sqrt{x^2 + k^2}) dx \quad x = k \operatorname{tg} t, \quad t \in (-\pi/2, \pi/2) \quad (2.32)$$

$$\int R(x, \sqrt{x^2 - k^2}) dx \quad x = \frac{k}{\sin t}, \quad t \in (-\pi/2, 0) \text{ nebo } t \in (0, \pi/2). \quad (2.33)$$

Jeden takový integrál typu (2.31) jsme již počítali — viz příklad 2.30 na str. 37. Nyní si ukážeme další.



Příklad 2.59. Vypočítejte neurčitý integrál $\int \frac{1}{x} \sqrt{x^2 - 1} dx$, $x \in (1, +\infty)$.

Řešení. Jedná se o integrál typu (2.33), přičemž $k = 1$. Po substituci a následných úpravách dostaneme

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x} \sqrt{x^2 - 1} dx &= \left| \begin{array}{l} x = \frac{1}{\sin t} \\ dx = -\frac{\cos t}{\sin^2 t} dt \end{array} \right| = - \int \frac{1}{\frac{1}{\sin t}} \cdot \sqrt{\frac{1}{\sin^2 t} - 1} \cdot \frac{\cos t}{\sin^2 t} dt = \\ &= - \int \sin t \sqrt{\frac{1 - \sin^2 t}{\sin^2 t}} \cdot \frac{\cos t}{\sin^2 t} dt = - \int \sin t \frac{|\cos t|}{|\sin t|} \cdot \frac{\cos t}{\sin^2 t} dt = \\ &= - \int \sin t \frac{\cos t}{\sin t} \cdot \frac{\cos t}{\sin^2 t} dt = - \int \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} dt = \\ &= - \int \frac{1 - \sin^2 t}{\sin^2 t} dt = \int \left(1 - \frac{1}{\sin^2 t} \right) dt = t + \operatorname{cotg} t + c. \end{aligned}$$

Protože $x \in (1, +\infty)$, volíme $t \in (0, \pi/2)$. Na tomto intervalu je $\sin t$ i $\cos t$ kladný, čehož jsme využili při odstraňování absolutních hodnot.

Dále musíme dosadit zpět původní proměnnou x . K tomu musíme vypočítat inverzní funkci. Vyjde nám

$$x = \frac{1}{\sin t} \quad \Rightarrow \quad \sin t = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad t = \arcsin \frac{1}{x}.$$

Před dosazením ještě předchozí výsledek upravíme. Postupně dostaneme

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x} \sqrt{x^2 - 1} dx &= t + \cotg t + c = t + \frac{\sqrt{1 - \sin^2 t}}{\sin t} + c = \\ &= \arcsin \frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x}} + c = \arcsin \frac{1}{x} + x \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2}} + c = \\ &= \arcsin \frac{1}{x} + x \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} = \arcsin \frac{1}{x} + \sqrt{x^2 - 1} + c. \end{aligned}$$

Podle věty 2.29 na str. 37 výsledek platí i na intervalu $(1, +\infty)$. ▲

Výpočet i zdánlivě jednoduchých integrálů typu (2.30) bývá technicky poměrně náročný a zdlouhavý, což ukazuje i předchozí příklad. Nejinak je tomu při použití Eulerových substitucí. Návíc je potřeba upozornit, že při řešení téhož integrálu jednou Eulerovými substitucemi a podruhé goniometrickými substitucemi (nebo dvěma různými Eulerovými substitucemi) můžeme dostat zdánlivě zcela odlišné výsledky. Často je dost netriviální ukázat pomocí úprav, že tyto výsledky jsou stejné (až na případnou konstantu).

2.6. Závěrečné poznámky

2.6.1. Dostaneme integraci elementární funkce opět elementární funkcí?

Na str. 10 jsme si připomněli, co rozumíme elementárními funkcemi. Není těžké si uvědomit, že z pravidel pro derivaci plyne, že derivováním elementární funkce vždy dostaneme opět elementární funkci.

Bohužel u neurčitého integrálu je situace komplikovanější. Protože elementární funkce jsou na intervalech, na nichž jsou definované, spojité, existují k nim podle věty 2.3 primitivní funkce. *Už ale není obecně pravda, že primitivní funkce k elementárním funkcím zase musí ležet v množině elementárních funkcí.* Tento poznatek však musíme správně interpretovat. V žádném případě neříkáme, že primitivní funkce k nějaké elementární funkci neexistuje. Jen tvrdíme, že ji nelze vyjádřit vzorcem takového tvaru, jak by se nám líbilo, tj. nelze ji vytvořit z jakýchsi přesně vymezených základních funkcí (mnohočleny, goniometrické funkce atd.) pomocí konečného počtu aritmetických operací a skládání.